平成３０年度　入学試験問題

数　学　問 題 用 紙（後期）

試験時間	９０分
問題用紙	１～１０頁

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り，鞄の中にしまうこと。
5. 机上には，受験票と筆記用具（鉛筆，シャープペンシル，消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓，コンパス，定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問，トイレ，体調不良等で用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は，問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後，解答用紙は裏返し，問題用紙は持ち帰ること。

受験番号		氏　名	

［Ⅰ］ a, b, c はいずれも 1 以上 9 以下の自然数とする。自然数 N を 11 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(11)}$ となり，13 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(13)}$ となるという。a, b, c の値を求めよ。また N を 10 進法で表せ。解答欄には答えのみを記入せよ。

[II]　O を原点とする座標空間において 2 点 $\mathrm{A}(3\sqrt{3}-3, 3\sqrt{3}+2, 0)$, $\mathrm{B}(6, -6\sqrt{3}-1, 6\sqrt{2})$ と平面 $\alpha : \sqrt{3}x - y - \sqrt{2}z = 1$ がある。また直線 AB と α との交点を P, α に関して B と対称な点を Q とするとき，以下の各問いの答えのみを解答用紙に記入せよ。

問 1　P の座標を求めよ。

問 2　B から平面 α に垂線 BH を下ろすとき，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を求めよ。

問 3　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めよ。

問 4　$\cos\angle\mathrm{BPQ}$ の値を求めよ。

[**III**]　複素数 z に対して

$$\frac{(1+i)(z+3i)}{z+4-i}$$

が実数となるとき，z の動く複素数平面上の図形を図示し，絶対値 $|z|$ の最大値，最小値を求めよ。

［IV］ O を原点とする xy 平面において，次の 2 曲線を考える：

$$C_1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (x \geqq 0, y \geqq 0), \qquad C_2 : y = -x^3 + \frac{7}{2}x$$

以下の各問いに答えよ。なお答えの数値は有理化すること。

問 1 C_1 と C_2 の交点の x 座標を全て求めよ。

問 2 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

［Ｖ］ 以下の各問いに答えよ。

問1 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k^2(n-1)^2}}$$

問2 すべての自然数 k と $0 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^k - \frac{k}{6}x^{k+2} \leqq \sin^k x \leqq x^k$$

ただし $\sin^k x = (\sin x)^k \ (k = 1, 2, \cdots)$ とする。

問3 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1 + kn^{k-1}\sin^k\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{k}{n^2}}\right\}$$

ただし数列 a_k に対して

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

である。